

Pensamiento Matemático Asociado al Límite de Funciones Trigonométricas

María Elena Bejarano
Universidad Nacional Experimental de Guayana
Venezuela
mbejaranouneg@yahoo.com
mbejarano@uneq.edu.ve

Cipriano Cruz
Universidad Central de Venezuela
Universidad Metropolitana
cruz@camelot.rect.ucv.ve
ccruz@unimet.edu.ve

RESUMEN

La idea fundamental de este trabajo es la visualización del concepto de límites de funciones trigonométricas, análisis de su definición y deducción de teoremas básicos de los mismos. El estudio descriptivo estuvo centrado en el uso de la V de Gowin como estrategia metacognitiva, de tal manera que los alumnos construyeran el concepto de límite a partir de varias clases de situaciones didácticas. La muestra estuvo conformada por veintidós estudiantes pertenecientes a una sección de Matemática II, del Proyecto de carrera de Ingeniería Industrial de la Universidad Nacional Experimental de Guayana (UNEG), Venezuela. La propuesta fue útil para evaluar el uso de la estrategia metacognitiva V de Gowin como mediadora para el desarrollo del pensamiento matemático, cuando se estudian límites de funciones trigonométricas. Se concluye que, efectivamente, ella es de gran utilidad en este proceso.

Palabras Claves: Dificultades en el aprendizaje del cálculo, Estrategia V de Gowin, Visualización del concepto de límite.

ABSTRACT

The fundamental idea of this paper is the visualization of the concept of trigonometric functions, analysis of its definition, and deduction of its basic theorems. The descriptive study was focused at the use of the V of Gowin as a metacognitive strategy, such that the students would construct the concept of limit from different types of didactical situations. The sample was composed by twenty two students from one section of Mathematics which belong to the career project of Industrial Engineer of Universidad Nacional Experimental de Guayana (UNEG). The proposal was useful to evaluate the use of the metacognitive strategy V of Gowin as a mediator for the mathematical thought development in the study of trigonometric function limits. Finally, as a conclusion, the V is, effectively of great help in the teaching-learning process.

Key words: Learning difficulties of calculus, Gowin's V Strategy, Visualization of the concept of limit.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza a través de la resolución de problemas, vista en muchos foros de vanguardia en Educación Matemática como una actividad alrededor de la cual debe girar el aprendizaje, pone énfasis en los procesos de pensamiento de los educandos y en los procesos de aprendizaje, aspectos que constituyen el enfoque global en este artículo.

En las sesiones de clases de Matemática I del proyecto de carrera de Ingeniería Industrial en la UNEG, se evidencian considerables dificultades en el proceso enseñanza aprendizaje del tema límite de funciones reales de variable real, lo cual constituye una preocupación de los docentes involucrados. A partir de esta preocupación surge el presente estudio, cuyas interrogantes iniciales son las siguientes: ¿cómo es que los alumnos perciben la idea de límite de funciones trigonométricas?, ¿qué códigos usan los estudiantes para procesar la información visual presente en este tema?, ¿perciben los aprendices los atributos topológicos de los objetos, tales como entorno, intervalo abierto, orden en \mathbb{R} , completitud de \mathbb{R} , las propiedades topológicas de los conjuntos abiertos, densidad de \mathbb{R} , la idea de proximidad, métrica usual, los valores que pueden asumir δ , ε , su representación en el plano real, su significado en la topología usual, cuando ellos usan la V de Gowin en la resolución de problemas asociados a los límites de funciones trigonométricas?.

El objetivo general del estudio fue evaluar el uso de la estrategia metacognitiva V de Gowin, como mediadora para el desarrollo del pensamiento matemático cuando se estudian límites de funciones trigonométricas. Los objetivos específicos fueron: visualizar y analizar los límites de funciones trigonométricas y, simultáneamente, buscar la deducción informal y formal de las propiedades de los límites de estas funciones, teniendo presentes los diferentes tipos de dificultades que aparecen en la enseñanza de este tema.

La propuesta fue útil para determinar el efecto que produce en el aprendizaje de los alumnos el uso de una estrategia didáctica que estimule, valore y active los procesos necesarios para superar las dificultades durante la enseñanza del concepto de límite. Esta estrategia fue la solución de problemas de límites usando distintos registros de representación (algebraico-geométrico-topológico-numérico y sus combinaciones) en la V de Gowin, bajo diferentes situaciones didácticas; con lo cual se determinó que el uso del instrumento metacognitivo resultó efectivo como mediador para enfrentar las dificultades presentes en la enseñanza del límite de funciones trigonométricas, de tal manera que se lograra, finalmente, una evaluación del desarrollo del razonamiento matemático empleado por los alumnos cuando estudian este tema.

Se previó que los futuros graduados en esta especialidad de la UNEG, mediante el estudio de la idea de aproximación inmersa en la definición de límite, deberían iniciarse en el estudio del cálculo entendiéndolo como una forma de pensamiento matemático; pero, por otra parte, se piensa que en el tratamiento sistemático del concepto de límite es una forma simple del concepto de diseño, tal como se usa en el campo de la ingeniería.

ANTECEDENTES

Centrarse en el estudio de la definición formal de límite constituye una vía de acceso para inducir el proceso de diseño, de tal manera que se logre una producción temprana en relación a él. Este proceso constituye la actividad primordial de la práctica de la ingeniería, donde el estudiante requiere aplicar los conocimientos adquiridos, aptitudes y puntos de vista propios para la creación de dispositivos, estructuras y procesos, que deben ser funcionales, económicos y, eventualmente, óptimos.

Se piensa que debe promoverse la idea de diseño desde los semestres iniciales de formación del futuro ingeniero, pues esta idea es significativa en el perfil profesional y ocupacional del egresado, ya que su desempeño laboral ha de consistir en general en el diseño de las siguientes actividades o procesos: los sistemas de calidad bajo normas ISO; el plan de acciones dirigido al logro de los objetivos de la calidad de una unidad de producción; los sistemas de mantenimiento preventivo; los esquemas de control de gestión operativa; las instalaciones industriales; los sistemas de divulgación de los procedimientos de normalización; los procesos industriales y de servicios; los sistemas de almacenamiento y distribución; los planes de entrenamiento del personal de una empresa; la documentación del sistema de calidad de gestión y adiestramiento del personal para su manejo; las hojas de cálculo para determinar estándares y soluciones a problemas; las propuestas de control de procesos para su implantación por computadoras; la enseñanza debe considerar la práctica del diseño en todos sus niveles; entre otros.

Esto último, da sentido a la propuesta de estudiar a profundidad cómo los alumnos adquieren y se apropian del concepto formal de límite, usando el enfoque de diseño, pues, apoyándose en elementos dados, (los recursos: la función $y = f(x)$, el $\epsilon > 0$ y el límite L), se trata de diseñar un número positivo (δ) que satisfaga las condiciones dadas en la definición formal de límite.

Según Maragno (2002), el tema de límite de funciones reales de variable real está inmerso dentro del conjunto de contenidos básicos indispensables para los planes de estudio de ingeniería en Venezuela, llámese Cálculo I o Matemática I. Aunque el estudio de la definición de límite es, en términos matemáticos, una oportunidad para abordar las ideas de aproximación y los procesos infinitos, en términos generales se trata de situaciones en las cuales “se debe producir algo”, bajo un cierto “conjunto de condiciones o restricciones” para “obtener una cierta meta”, posible de visualizar o establecer en términos numéricos, algebraicos o geométricos.

Por otra parte, el estudio es pertinente por su alcance social, ya que ha de aplicarse un instrumento que puede orientar y centrar la práctica alumno-docente-contexto, en la búsqueda de un proceso de enseñanza-aprendizaje con impacto en la preparación estratégica del futuro profesional para un desempeño laboral eficiente. Durante el trabajo de campo los involucrados tuvieron la oportunidad de pensar sobre sus propios procesos internos, evaluaron y verificaron sus respuestas, diagnosticaron los contenidos teórico-prácticos que requirieron a la hora de definir un problema y construyeron soluciones producto de experimentaciones, simulaciones, trabajo colaborativo e inventiva.

Finalmente, se justifica la investigación por el hecho mismo de evaluar los factores (obstáculos) incidentes en el aprendizaje del cálculo de límites de funciones reales, tema en el cual el

rendimiento estudiantil suele ser muy bajo. Un fin práctico es, en consecuencia, buscar un mejoramiento de la calidad del proceso de enseñanza aprendizaje con el uso de técnicas metodológicas que posibiliten superar el rendimiento estudiantil actual.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Para efectos de este trabajo **un obstáculo** es una barrera infranqueable que desvirtúa una realidad teórica instituida de carácter universal (legítima), que impide, en lo perceptual, conceptual o procedimental, el alcance de una respuesta a un problema.

Según Artigue (1995), un obstáculo puede ser: (a) de naturaleza **epistemológica**, cuando se trata de una barrera infranqueable que subyace a partir de la naturaleza misma del contenido, lo cual, en el caso de este estudio, interrumpe el proceso de visualización y análisis generado en los alumnos cuando estudian límites trigonométricos básicos, (b) de origen **didáctico**, cuando deriva del proceso de enseñanza y aprendizaje, desde el uso inadecuado del recurso humano y material disponible para el desarrollo de la actividad de aula hasta las dificultades comunicacionales, y/o (c) de tipo **cognitivo**, cuando está vinculado a las ideas previas que debe poseer el estudiante para el aprendizaje y que se presentan en el momento en que el alumno inicia el proceso de relacionar los nuevos conocimientos con otros establecidos, los cuales, a menudo son provisorios, imprecisos y/o incorrectos. Esta definición se fundamenta en la noción de obstáculo de Brousseau (1989, citada por Malisani, 1999).

En este estudio, los obstáculos que presenta el alumno serán considerados las variables de comando. De acuerdo a Cantoral y cols. (2002), las variables de comando pueden ser manipuladas por el docente para logra la evolución del comportamiento de los estudiantes que participan en el estudio. Dentro de estas variables se tienen, en el caso presente: la relación de las razones trigonométricas en el círculo trigonométrico, el uso de las propiedades de las desigualdades, el uso de la técnica heurística metacognitiva V de Gowin (Cruz, 1994, Morales, 1998, Cruz 2000), el uso de diferentes sistemas de representación para superar, por ejemplo, las confusiones conceptuales y procedimentales.

Por otra parte, se hace uso de la teoría de las situaciones didácticas, pues según Cantoral (2002), esta teoría "...permite diseñar y explorar un conjunto de secuencias de clase concebidas por el profesor con el fin de disponer de un medio para realizar un cierto proyecto de aprendizaje". Estas situaciones didácticas se clasifican como: de **acción, formulación, validación e institucionalización**.

Los **obstáculos epistemológicos** analizados fueron de tipo: **conceptuales**, aquellos que bloquearon el proceso de enseñanza aprendizaje, ya que encerraron la complejidad de los objetos básicos en el cálculo de los límites básicos de funciones trigonométricas; **relacionales**, aquellos que dificultaron el proceso de enseñanza aprendizaje, porque constituyeron la complejidad de las vinculaciones entre conceptos, lo cual se estableció para buscar la formalización de la noción del límite de funciones trigonométricas y **procedimentales**, aquellas dificultades que impidieron el proceso de enseñanza y aprendizaje, por asimilar y ajustar el impacto que tuvo que representar la ruptura vital del pensamiento netamente algebraico, para hacerlo extensivo al pensamiento matemático, que vinculó entre otros, el pensamiento numérico, geométrico, y topológico, además del algebraico.

En este estudio, el pensamiento matemático constituye el razonamiento y las formas de comunicación que usan los alumnos para intercambiar informaciones y procedimientos sobre el límite de una función real de variable real y que involucra procesos avanzados del pensamiento; tales como el diseño, la ejecución, la abstracción, la argumentación y la supervisión; bajo diferentes contextos de representación: el algebraico, el geométrico, el numérico y sus combinaciones. Así, el **pensamiento numérico** asociado a la idea de límite tiene que ver tanto con la construcción de tablas de valores de una función como con la visualización de procesos numéricos secuenciales de naturaleza infinita que pueden resultar convergentes o divergentes, el **pensamiento algebraico** asociado a la idea de límite comprende el uso y la comunicación de conceptos, relaciones y procedimientos propios de las equivalencia y desigualdades entre expresiones algebraicas y que permiten, entre otras cosas: acotar conjuntos y reemplazar expresiones algebraicas por otras equivalentes y, el **pensamiento geométrico** comprende la visualización y uso de conceptos, relaciones y procedimientos mediante los cuales se grafica una función y se obtienen conjeturas acerca de su comportamiento cuando se la observa a través de una “ventana de espionaje”.

La visualización del concepto de límite es la habilidad que posee el alumno para representar, transformar, generar, comunicar, argumentar y reflejar información numérica, algebraica o visual en torno a la idea de límite de una función real en un punto.

La deducción de teoremas se concibe como el proceso que comprende el razonamiento lógico del aprendiz, el cual surge desde la hipótesis y conduce a la verdad de una proposición (tesis), usando reglas de inferencia, a través del uso de los diagramas V de Gowin.

Deducir es equivalente a inferir conclusiones, a partir de un conjunto de premisas. En las demostraciones formales o deducciones desarrolladas en las V's, fue preciso justificar cada paso del proceso inferencial, haciendo referencia a la regla o propiedad particular de inferencia que permitió cada paso. Esta tarea constituye la argumentación, como proceso de pensamiento matemático avanzado.

MARCO METODOLÓGICO

Descripción sucinta del grupo y del modelo didáctico

En esta propuesta didáctica la instrucción se entendió como el conjunto de acciones deliberadas que se orientaron a facilitar el aprendizaje. El contenido estuvo conformado por el límite de funciones trigonométricas. El contexto comprendió dos sesiones de clases con veintidós alumnos del segundo semestre de la carrera de Ingeniería Industrial en la UNEG, cuyo momento correspondió a la sexta semana de un total de quince semanas que comprende un semestre académico regular.

Diseño de instrucción de las situaciones didácticas

Con el enfoque global la teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau, se usó el modelo de Van Hiele (citado en Cantoral, 2002) referido a las fases del proceso de aprendizaje que conducen a un nivel más alto del pensamiento:

Fase 1: información. En este estado inicial el docente establece un diálogo con sus estudiantes, de tal manera que ellos manifiesten algunas ideas intuitivas de la noción de límites de funciones trigonométricas que manejaban. El propósito de este intercambio estuvo dirigido a orientar los intereses de los alumnos hacia el tema específico a desarrollar y, por supuesto, a recabar información acerca de los conocimientos previos que los alumnos tenían.

Fase 2: orientación guiada. El docente entrega una guía de instrucción para ser desarrollada por los estudiantes. Primeramente, se trabajaron las actividades en forma individual y luego en forma colectiva, para lo cual se conformaron parejas de estudio. A continuación se presenta una síntesis del contenido de este material entregado:

Desarrollo:

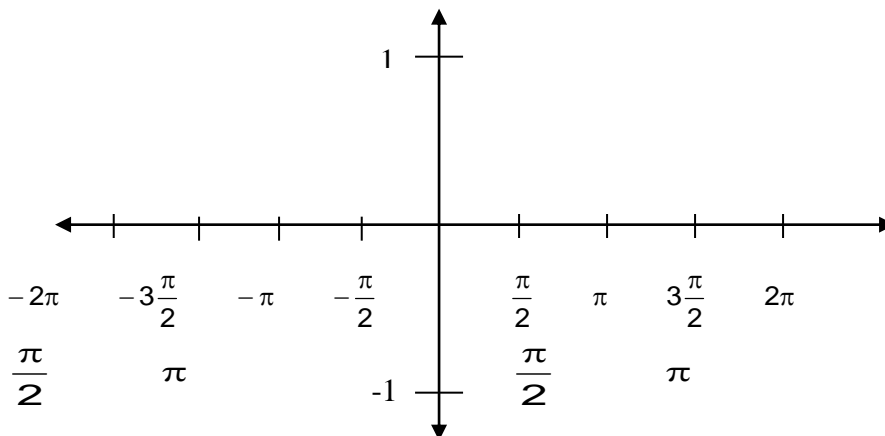
Actividad 1: Desarrolle la actividad, haciendo uso de la V de Gowin.

Instrucciones:

Analice cada una de las situaciones presentadas y responda, por favor, con claridad.

- Trabaje, individualmente, cada actividad y luego, en pareja, comparta sus resultados.
- Se construirá una V de Gowin para cada actividad. Este trabajo será colectivo, a partir de la participación de todos los estudiantes.
- Los resultados arrojados en la aplicación de este instrumento no tendrán validez alguna sobre la evaluación del curso, ni serán utilizados con otro fin que no sea el de colaborar en un trabajo de investigación, que se está desarrollando desde el Área de Matemática.

Actividad 1.1: Grafique la función $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1,1]$, que viene dada por $f(x) = \text{sen}(x)$.



¿A cuál(es) valor (es) se aproxima f , cuando x tiende a cero?. ¿Existe el límite de f , cuando x tiende a cero?. ¿Cuál es el límite de f , cuando x tiende a cero, si es que existe?. ¿A cuál(es) valor(es) se aproxima f , cuando x tiende a $+\infty$?. ¿Existe el límite de f , cuando x tiende a $+\infty$?. ¿Cuál es el límite de f , cuando x tiende a $+\infty$, si es que existe?. ¿A cuál(es) valor(es) se

aproxima f , cuando x tiende a $-\infty$? ¿Existe el límite de f , cuando x tiende a $-\infty$? ¿Cuál es el límite de f , cuando x tiende a $-\infty$, si es que existe?.

Actividad 1.2: Realice una tabla de valores para la función $g: \mathbb{R} \rightarrow [-1,1]$, que viene dada por $g(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$. Utilice valores para x , correspondientes al conjunto de los números reales cercanos a cero.

¿A cuál valor se aproxima g , cuando x tiende a cero? ¿Existe el límite de g , cuando x tiende a cero? ¿Cuál es el límite de g , cuando x tiende a cero, si es que existe?.

Actividad 1.3: Realice una tabla de valores para la función $h: \mathbb{R} \rightarrow [-1,1]$, que viene dada por $h(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$. Utilice valores para x cercanos a cero, cuya escala de medición sea en radianes (π).

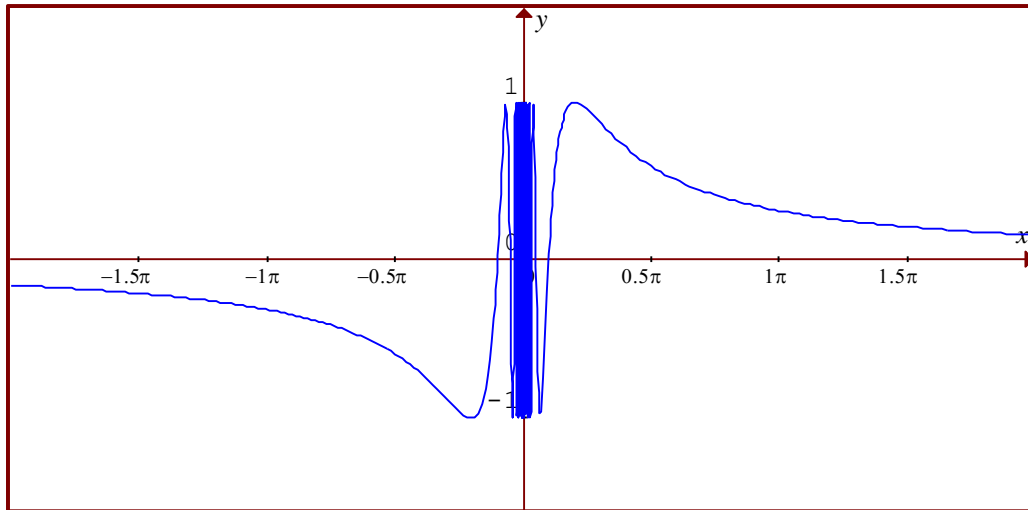
x	$h(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

¿A cuál valor se aproxima h , cuando x tiende a cero? ¿Existe el límite de h , cuando x tiende a cero? ¿Cuál es el límite de h , cuando x tiende a cero, si es que existe?.

Actividad 1.4: A continuación se muestra la gráfica de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1,1]$, definida por $f(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$.

x	$g(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

GRÁFICA DE LA FUNCIÓN SEN 1/X



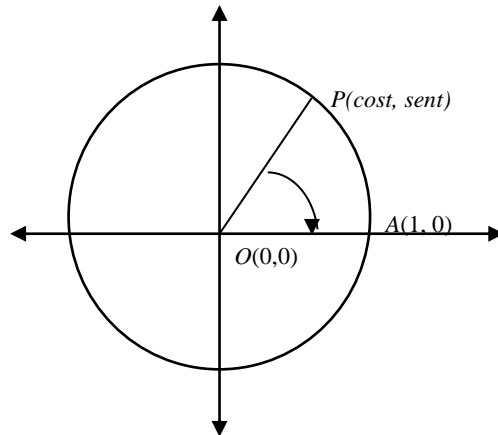
¿A cuál(es) valor(es) se aproxima f , cuando x tiende a cero?. ¿Existe el límite de f , cuando x tiende a cero?. ¿Cuál es el límite de f , cuando x tiende a cero, si es que existe?. ¿A cuál(es) valor(es) se aproxima f , cuando x tiende a $+\infty$?. ¿Existe el límite de f , cuando x tiende a $+\infty$?. ¿Cuál es el límite de f , cuando x tiende a $+\infty$, si es que existe?. ¿A cuál(es) valor(es) se aproxima f , cuando x tiende a $-\infty$?. ¿Cuál es el límite de f cuando x tiende a $-\infty$, si es que existe?.

Actividad 1.5: Calcule, si es que existe, $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Actividad 1.6: Demuestre la existencia o no de $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Actividad 2: Desarrolle la siguiente actividad, haciendo uso de la V de Gowin:

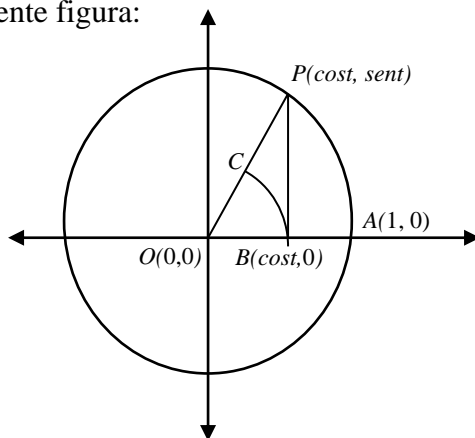
Actividad 2.1: Considerando el diagrama de la figura adjunta. Observe que si $t \rightarrow 0$, entonces el punto $P(\cos t, \sin t)$ “se mueve” hacia el punto $A(1,0)$.



Ahora, ¿cuál es el límite de la función coseno de t , cuando $t \rightarrow 0$? Es decir, $\lim_{t \rightarrow 0} \cos t = \underline{\hspace{2cm}}$

De la misma manera, razone y responda: ¿cuál es el límite de la función seno de t , cuando $t \rightarrow 0$? Es decir, $\lim_{t \rightarrow 0} \sin t = \underline{\hspace{2cm}}$

Ahora, para $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, $t \neq 0$, se dibuja el segmento de recta vertical BP y el arco circular BC , como lo ilustra la siguiente figura:

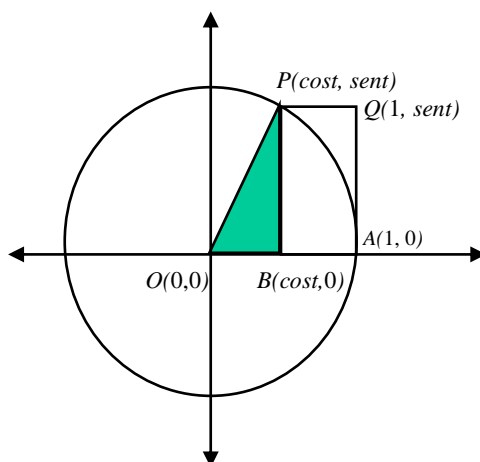


Así,

$$\text{Área}(\text{sector } OBC) \leq \text{Área}(\triangle OBP) \leq \text{Área}(\text{sector } OAP)$$

A partir de esta doble desigualdad, ¿qué puede usted deducir del $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, haciendo uso de las fórmulas del área de un triángulo, del sector circular y el teorema del emparedado?.

Actividad 2.2: Similarmente, a partir de la siguiente figura,



Se tiene que:

$$\text{Área}(\triangle OBP) \leq \text{Área}(\text{sector } OAP) \leq \text{Área}(\triangle OBP) + \text{Área}(\square ABPQ)$$

Pruebe que: $\cos t \leq \frac{t}{\text{sent } t} \leq 2 - \cos t$

Y finalmente, desde esta doble desigualdad,

demuestre que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{sent } t}{t} = 1$. (Ejercicio tomado de Purcell y Varberg, (1992), pp119).

Actividad 3:

Utilizando la V de Gowin argumente por qué el $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 0$. (Ejercicio tomado de Purcell y Varberg, (1992), pp119).

Fase 3: Explicitación: Los estudiantes construyeron sus respuestas. Luego intercambiaron ideas con sus compañeros de grupo y, finalmente, se compartió en plenaria la experiencia de todos y los argumentos presentados para aseverar y asumir tal o cual planteamiento de solución. El docente aportó la ayuda necesaria para que se lograra el momento de institucionalizar la idea formal en cada situación y colaboró para que, en su mayoría, los estudiantes lograran apropiarse de la conceptualización adecuada de los objetos propios del tema abordado y sus relaciones con otros objetos de estudio.

Fase 4: Orientación Libre. El estudiante construyó una V de Gowin para cada uno de los ejercicios propuestos desde los enunciados dados, a objeto de cerrar la idea matemática central. El docente entregó unos diagramas, para que éstos fueran completados en parejas, de acuerdo a los establecidos al inicio. Se realizó nuevamente el intercambio general de experiencias y respuestas asumidas particularmente.

Fase 5: Integración. Todos los estudiantes participaron en la construcción en conjunto de una V de Gowin diseñada en el pizarrón para cada uno de los ejercicios propuestos desde los enunciados dados. Estas V constituyeron un compendio de los argumentos válidos institucionalizados a lo largo del proceso de enseñanza seguido (ver anexos).

El docente condujo y retroalimentó los aportes, de tal manera que quedara plasmado en el diagrama indicado, el número máximo posible de conclusiones extraídas durante las actividades desarrolladas. A su vez, durante todas las sesiones de clases, el profesor realizó grabaciones de audio para su análisis posterior.

En síntesis, durante cada actividad existieron tres momentos didácticos, estos asumidos desde Cantoral y cols. (2002): **la resolución de la actividad, la presentación y discusión de las soluciones y anexos y retroalimentación.**

ANÁLISIS DE RESULTADOS

-Los alumnos que conformaron la muestra, visualizaron el concepto de límite usual como una línea fronteriza que a su vez representó un tope máximo. Para ellos, esta barrera que divide es infranqueable, pues asumen una posición invariante. Así, la idea de aproximación implícita en el concepto de límite (acercarse por la izquierda y por la derecha), no la conciben dentro de un contexto no formalizado de la definición.

-La concepción usual de límite que se tenía como un “tope”, se fraccionó cuando se hizo variar t alrededor del valor cero, en el ejercicio propuesto para la actividad 2.

-Los **obstáculos epistemológicos conceptuales** encontrados estuvieron constituidos por: la idea de aproximación “tiende”(Si $t \rightarrow 0$, entonces el punto $P(\cos t, \sin t)$ se aproxima al punto $P(1,0)$); el concepto mismo de la función seno y coseno; el concepto de límite fue visto, como el último término de un proceso, que tiende al mismo tiempo a reforzar concepciones monótonas estrictas de la convergencia; luego, bastó observar qué pasaba con la idea de ese último término, cuando el límite de la función alrededor de un punto no existía (actividad 1) o presenta indeterminaciones tipo (actividad 3); la existencia o no del límite (actividad 2); el concepto de convergencia o divergencia y la definición de límite presentes en todas las actividades propuestas.

-Por otra parte, los **obstáculos epistemológicos relacionales** estuvieron representados por: el teorema del emparedado; las propiedades de las desigualdades; las razones trigonométricas; el proceso de ambivalencia que se desarrolló, cuando a partir del círculo unitario trigonométrico se pudo llegar a describir el comportamiento de la función seno y coseno; la evaluación misma de las funciones trigonométricas en cualquier punto de su dominio (cómo el seno de un valor expresado en radianes se transforma en un número real); las equivalencias en las escalas de medición (de grados a radianes o viceversa).

-Los **obstáculos epistemológicos procedimentales** se presentaron por los cambios generados, sobre todo con respecto a la existencia del límite, desde los diferentes sistemas de representación del límite alrededor del cero de la función f , tal que $f: \mathcal{R} \rightarrow [-1,1]$, viene dada por

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ (esto se abordó en la actividad 1).}$$

-Al resolver las actividades 2 y 3, lo valioso estuvo representado por el paso del razonamiento por equivalencias sucesivas a razonamientos por condiciones suficientes, a través del uso de la V. Así pues, desde una desigualdad dada inicialmente y a través de una serie de razonamientos sucesivos se concluyó, utilizando el teorema del emparedado, la verdad de la tesis que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$.

Similarmente, la actividad 3, sirvió para mostrar la equivalencia de la expresión $\frac{1 - \cos t}{t}$, con la

expresión $\frac{\sin^2 t}{t(1 + \cos t)}$, cuando $t \neq 0$, ya que el límite de la expresión inicial es imposible

calcularlo directamente, puesto que presenta una forma indeterminada $0/0$, lo que implica una competencia de fuerzas opuestas, cuyo resultado no es obvio.

-Por otra parte, los obstáculos de la intuición en el aprendizaje del proceso infinito inmerso en la definición de límite, se estudiaron a partir de las tablas de valores que se construyeron en la actividad 1, donde en la primera tabla se llegó a pensar que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$ y desde la segunda que

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right)$ no existe.

-La definición de valor absoluto representó un obstáculo epistemológico, el cual fue superado.

-Sin embargo, el análisis de la definición formal de límite por parte de los alumnos fue imposible lograrlo, ya que no hubo manifestación verbal de los estudiantes respecto a este punto. Esto condujo a inferir que los alumnos no comprendieron lo que significa el límite de una función y mucho menos su definición formal.

-Las deducciones formales e informales de los teoremas abordados, se fueron dando en el proceso de construcción de las V de Gowin. Lo cual reafirma las ideas de Cruz (1994), Morales (1998) y Cruz (2000) sobre el uso de esta estrategia como organizadora del conocimiento matemático generado, así como también, es de gran ayuda para plasmar los avances y desaciertos que se originen en el proceso de internalización de las proposiciones estudiadas.

-El uso del instrumento metacognitivo V de Gowin, sirvió como mediador entre los estudiantes-contexto-docente para evidenciar y olvidar algunas dificultades de tipo epistemológico, cognitivo y didáctico; tales como:

-Se evidenció una confusión entre los objetos básicos que representan, la recta tangente al círculo trigonométrico y la tangente como razón trigonométrica.

-Las concepciones muy dependientes de una geometría de la forma no obligaron a identificar con claridad sobre cuales objetos con exactitud se lleva a cabo el proceso del límite y la topología subyacente, lo cual causó dificultades en la percepción del juego sutil entre el cuadro numérico y el cuadro geométrico que subyace al proceso del límite, e introdujo y/o reforzó convicciones erróneas como la creencia en que si geoméricamente un objeto tiende hacia otro, todas las magnitudes que le están asociadas tendrán por límite valores correspondientes a las magnitudes del objeto límite. En la actividad 1, por ejemplo, algunos estudiantes dedujeron a partir de la gráfica del seno que $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen} x = 0$, de aquí que $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen} \left(\frac{1}{x}\right)$ también es cero. Esto se atribuyó al

hecho de que estos alumnos no identificaron dos objetos diferentes, como lo son las funciones $\text{sen} x$ y $\text{sen} \left(\frac{1}{x}\right)$.

-La construcción de la V permitió además, fomentar en los alumnos el pensamiento al revés. Desde la actividad 1, se supuso cierta la tesis de que $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ existe, en base a la hipótesis dada, llegando luego a una contradicción en la teoría de conjuntos de los números reales. De esta manera, se indujo a romper el paradigma del pensamiento netamente algorítmico.

-La implementación de la estrategia V de Gowin, permitió que todos los alumnos se centraran en el problema en estudio y aportaran ideas en la búsqueda de soluciones para, finalmente, mejorar las prácticas de la enseñanza del límite. De esta manera, la praxeología desarrollada por el docente, aquella que según Espinoza y Azcárate (2000) vincula el hacer y el saber-hacer del profesor, permitió la optimización del tiempo durante las actividades desarrolladas y contribuyó en la calidad de las respuestas a medida que pasaba el tiempo. Todas las dificultades fueron atendidas en el proceso de construcción de la V, ya que se limaron asperezas y entuertos de conocimiento matemático que se podían observar y, a su vez, se aclaraban todas las confusiones conceptuales manifestadas.

CONCLUSIONES

Dentro de los logros alcanzados en esta investigación, a través del uso de la V de Gowin como estrategia metacognitiva, se pueden citar los siguientes:

- La V de Gowin sirvió como mediadora entre los estudiantes-contexto-docente, para evidenciar y superar algunas dificultades.
- La V de Gowin fue de gran ayuda para plasmar los avances y desaciertos que se originaron en el proceso de internalización de las proposiciones estudiadas.
- La V de Gowin permitió fomentar en los alumnos el pensamiento al revés, al hacer uso del método de demostración indirecta. En todos los diseños elaborados, primero se visualizó la meta y consecuentemente las acciones que conducían a esta.
- La V de Gowin permitió que todos los alumnos se centraran en el problema en estudio y aportaran ideas en la búsqueda de soluciones, superando la calidad de las respuestas a medida que pasaba el tiempo.
- La V de Gowin permitió que la praxeología desarrollada por el docente, en base a esta estrategia, optimizara el tiempo durante las actividades desarrolladas, mejorando las prácticas de la enseñanza del límite.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*. Pedro Gomez Bogota: Grupo Editorial Iberoamérica, (pp. 54-72).

- Cantoral y Cols. (2002). *Desarrollo del pensamiento matemático*. Preedición 2000. México: Trillas, (pp. 33-169).
- Cruz, C. (1994). Estrategias cognoscitivas para la enseñanza de la matemática: posibilidades y limitaciones. *Enseñanza de la Matemática*. 3(3), 3-15.
- Cruz, C. (2000). *Estrategias metacognitivas y estrategias de aula en la enseñanza de la matemática*. Conferencia Presentada en la V Reunión de Didáctica de la Matemática del Cono Sur. Santiago De Chile.
- Espinoza, L Azcárate, C (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto de límite de función: una propuesta metodológica para el análisis; *Revista Enseñanza de las Ciencias*. 18(3), 355-368.
- Malisani, E (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. Visión holística. IRICE. Instituto Rosario de Investigaciones en Ciencias de la Educación, N° 13. Argentina. Traducción.
- Maragno P. (2002). Propuesta metodológica para la evaluación de los planes de estudio de ingeniería. *Revista de la facultad de ingeniería*; 17(1), 5-15.
- Morales, E (1998). Efectos de una didáctica centrada en la resolución de problemas empleando la técnica heurística V de Gowin y mapas conceptuales en el razonamiento matemático de los alumnos de 9° grado de educación básica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 1(2), 77-92.
- Purcell, E y Varberg, D. (1992). *Cálculo con geometría analítica*.(6a. ed.). México: Prentice Hall, (pp. 61-121).