# Interpolación de cónicas en 3D, usando superficies cúbicas

Autores: Jonnathan Otero, Julio Daza y Francisco Tovar

Departamento de Matemáticas

Universidad Metropolitana

Resumen

El objetivo de esta investigación es diseñar y controlar una superficie algebraica de grado tres o *Cuboide*, que interpola dos cónicas dadas que yacen en dos planos diferentes en 3D. El antecedente a esta investigación es el estudio de ciertas superficies tubulares, diseñadas con la envolvente de una familia monoparamétrica cuadrática de esferas. La ecuación implícita de tales superficies tubulares tiene en general grado 4 y en ciertos casos particulares es de grado 3, es decir un cuboide. Dado que estas superficies tubulares constan de perfiles circulares, es posible prescribir dos círculos de interpolación para el diseño de splines tubulares de clase $G^1$ (continuidad de los planos tangentes, sobre los círculos de interpolación prescritos). Nuestro estudio trata de generalizar la expresión de esta superficie tubular de grado 3, de modo que interpole cualquier par de cónicas en el espacio, usando una sección de un cuboide. En particular, hacemos énfasis en el caso que las cónicas de interpolación prescritas sean elipses y todos los perfiles del cuboide sean también elípticos, para diseñar superficies tubulares de grado tres con perfiles no necesariamente circulares.

Los perfiles que definen el segmento del cuboide, resultan al abatir la superficie cúbica desde la cónica inicial de interpolación hasta la cónica final, con una familia de planos que tienen una recta en común. Los segmentos construidos en este artículo se pueden conectar con clase $G^1$, además se puede controlar cada segmento (dilatar o contraer) sin afectar la conexión entre dos segmentos consecutivos.

**Palabras clave**: Cuboides, cíclides, superficies tubulares, splines.

# Interpolación de cónicas en 3D, usando superficies cúbicas.

Autores: Jonnathan Otero, Julio Daza y Francisco Tovar

Departamento de Matemáticas

Universidad Metropolitana

## Introducción.

El objetivo de esta investigación es diseñar y controlar una superficie algebraica de grado tres o *cuboide*, que interpola dos cónicas dadas que yacen en dos planos diferentes en 3D. El antecedente a esta investigación es el estudio de ciertas superficies tubulares, diseñadas con la envolvente de una familia monoparamétrica cuadrática de esferas [Paluszny-Boehm], [Paluszny-Tovar],[ Boehm-Paluszny]. La ecuación implícita de tales superficies tubulares tiene en general grado algebraico 4 y en ciertos casos particulares es de grado 3, es decir un cuboide. Dado que estas superficies tubulares constan de perfiles circulares, es posible prescribir dos círculos de interpolación para el diseño de splines tubulares. Estos splines tubulares se construyen en general con clase $G^1$ , esto es, coincidencia de los planos tangentes sobre los círculos de conexión de dos segmentos de superficie. Nuestro estudio trata de generalizar la expresión de esta superficie tubular de grado 3, de modo que se puedan interpolar cualquier par de cónicas en el espacio, usando una sección de un cuboide. En particular, hacemos énfasis en el caso que las cónicas de interpolación dadas sean elipses y todos los perfiles del cuboide sean también elípticos, de esta forma se pueden diseñar superficies tubulares de grado tres, con perfiles no necesariamente circulares.

En [Bajaj-Xu], se construyen splines con segmentos de superficies algebraicas, los cuales son llamados A-patches. En esta construcción se usan segmentos de cuboides en coordenadas tetraédricas y se estudia la conexión de dos segmentos de superficie sobre la traza del cuboide con el tetraedro. En nuestro, caso también estudiamos la construcción de un cuboide interpolante en coordenadas tetraédricas, pero controlando cada perfil de la superficie. Para hacer esto, se considera la familia de cuboides tales que, una de sus rectas coincida con una de las aristas del tetraedro. De esta forma los perfiles cónicos del cuboide son consecuencia de abatir la superficie desde la cónica inicial de interpolación hasta la cónica final, con una familia de planos que tienen esa recta en común. El proceso es similar al caso de las superficies tubulares descritas en [Paluszny- Boehm], [Paluszny-Tovar].

Los segmentos construidos en este artículo interpolan una secuencia de cónicas dadas en el espacio y se pueden conectar con clase $G^1$.

Nótese que si se considera el problema de interpolar dos cónicas en 3D, que yacen en dos planos diferentes con una superficie algebraica de grado dos o cuádrica, no se tienen suficientes grados de libertad para resolver el problema. Por esta razón se utilizan cuboides.

**Superficie algebraica de grado tres o cuboide.**

La expresión general de un cuboide en coordenadas tetraédricas $(s,t,u,v)$ está dada por:

$$C(s,t,u,v) = \sum_{i=1}^{20} a_i s^l t^m u^n v^k, \quad l+m+n+k = 3, \; a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, 20 \tag{1}$$

Si esta superficie contiene la recta $\begin{cases} s = 0 \\ u = 0 \end{cases}$, se reduce a:

$$C_a(s,t,u,v) = uCs_a(t,u,v) + sCu_a(s,t,v) + suP_a(s,t,u,v) \tag{2}$$

Donde:

$$Cs_a(t,u,v) = a_1u^2 + a_2tu + a_3t^2 + a_4uv + a_5v^2 + a_6tv \tag{3}$$

$$Cu_a(s,t,v) = a_7s^2 + a_8ts + a_9t^2 + a_{10}sv + a_{11}v^2 + a_{12}tv \tag{4}$$

$$P_a(s,t,u,v) = a_{13}s + a_{14}t + a_{15}u + a_{16}v \tag{5}$$

Al intersectar el cuboide dado por (2) con el plano s=0, resulta la cúbica reducible $uCs_a(t,u,v) = 0$, y análogamente resulta la cúbica reducible $sCu_a(s,t,v)$=0 al intersectar la ecuación (2) con el plano u=0.

Los coeficientes que definen el plano $P_a(s,t,u,v) = 0$, son libres y el cuboide interpola las cónicas preestablecidas por $Cs_a(t,u,v) = 0$, en el plano $s = 0$ y $Cu_a(s,t,v)$ en el plano $u = 0$.

Nótese que las cónicas de interpolación inicial y final del cuboide, se preescriben, con los coeficientes de las cónicas (3) y (4). Aquí se evidencia que si se pretende hacer este procedimiento usando superficies de grado 2, no se tienen suficientes parámetros libres para definir las cónicas de interpolación de forma independiente.

La Figura 1 muestra un segmento de cuboide que interpola dos cónica dada.

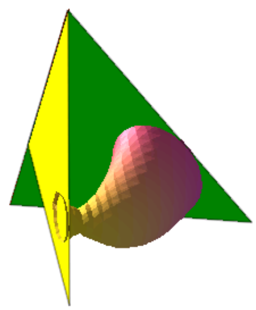

Figura 1. Ejemplo de un cuboide de interpolación.

**Conexión de dos segmentos de cuboide de clase $G^1$.**

Supongamos que se tienen dos cuboides, el primero dado por la ecuación (2) y el segundo cuboide dado por:

$$C_b(s,t,u,v) = uCs_b(t,u,v) + sCu_b(s,t,v) + suP_b(s,t,u,v) \qquad (6)$$

Donde:

$$Cs_b(t,u,v) = \alpha a_1 u^2 + \alpha a_2 tu + \alpha a_3 t^2 + \alpha a_4 uv + \alpha a_5 v^2 + \alpha a_6 tv \qquad (7)$$

$$Cu_b(s,t,v) = b_7 s^2 + b_8 ts + b_9 t^2 + b_{10} sv + b_{11} v^2 + b_{12} tv \qquad (8)$$

$$P_b(s,t,u,v) = b_{13} s + b_{14} t + b_{15} u + b_{16} v \qquad (9)$$

La ecuación (6) muestra un segundo cuboide que se conecta con el primer cuboide con clase $G^0$, ya que coinciden sobre el plano $s = 0$.

Al establecer las condiciones para que la familia de planos tangentes coincidan a lo largo de la cónica común en el plano $s=0$. Se obtienen las siguientes condiciones sobe los coeficientes del segundo cuboide dado por (6):

$$\begin{cases} b_9 = \alpha\, a_9 \\ b_{11} = \alpha\, a_{11} \\ b_{12} = \alpha\, a_{12} \\ b_{14} = \alpha\, a_{14} \\ b_{15} = \alpha\, a_{15} \\ b_{16} = \alpha\, a_{16} \end{cases}$$

Donde $\alpha$ es un parámetro real. Este sistema de ecuaciones resulta de calcular los coeficientes de la familia de planos tangentes y buscar las condiciones para que todos coincidan sobre la cónica de interpolación.

Estas condiciones le restan grados de libertad a la escogencia de la cónica de interpolación del segundo cuboide sobre el plano $u=0$, dado por la expresión (6), sin embargo quedan tres parámetros libres para modificar la cónica antes mencionada.

En la figura 2 se observan dos cuboides conectados con clase $G^1$

En conclusión para que dos cuboides se conecten de clase $G^1$, la ecuación del primero debe estar dado por (2) y la ecuación del segundo debe ser:

$$C_b(s,t,u,v) = uCs_b(t,u,v) + sCu_b(s,t,v) + suP_b(s,t,u,v)$$

Donde:

$$Cs_b(t,u,v) = \alpha a_1 u^2 + \alpha a_2 tu + \alpha a_3 t^2 + \alpha a_4 uv + \alpha a_5 v^2 + \alpha a_6 tv$$

$$Cu_b(s,t,v) = b_7 s^2 + b_8 ts + \alpha a_9 t^2 + b_{10} sv + \alpha a_{11} v^2 + \alpha a_{12} tv \quad (10)$$

$$P_b(s,t,u,v) = b_{13} s + \alpha a_{14} t + \alpha a_{15} u + \alpha a_{16} v \quad (11)$$

**Cuboide con perfiles elípticos**

En el caso de la construcción de superficies tubulares estudiadas clásicamente, tales como las cíclides, sus perfiles son círculos (véase [Palusz-Bohem], [Palusz-Tovar]). En nuestro caso las curvar que definen el perfíl de la superficie son cónicas en general. En particular, para la construcción de superficies tubulares usando cuboides vamos a utilizar perfiles elípticos.

Para que el cuboide esté formado de perfiles elípticos se requieren dos condiciones geométricas:

1) La cúbica en el infinito del cuboide debe ser reducible, esto es, el producto de una cónica con una recta.

2) La cónica definida por la cúbica en el inifinito, debe ser imaginaria.

Estas dos propiedades garantizan que las cónicas que forman los perfíles del cuboide sean elipses (no necesariamente elipses reales, pueden ser imaginarias).

Si la cúbica en el infinito está dada por el pruducto de una recta con una cónica, la expresión de esta curva debe ser:

$$Cubica(s,t,u) = (As^2 + Bt^2 + Cu^2 + Ets + Fsu + Gtu)(Hs + Jt + Ku) \qquad (12)$$

Donde los coeficientes de la expresión (12) dependen de las cónicas de interpolación y el plano dado en (5). Para el caso $A \neq 0$, resulta que el factor cuadrático dado en (12) no tiene puntos reales si se satisface la condición:

$$(4BAC - BF^2 - CE^2 + EFG - AG^2)A > 0 \qquad (13)$$

El caso A=0, la expresión anterior se reduce a estudiar $(BF^2 - FEG + E^2C) < 0$.

Para calcular la cúbica en el infinito del cuboide dado en (2), éste se intersecta con el plano $s + t + u + v = 0$. Para que la cúbica en el infinito sea reducible como en la expresión (11), se definen los coeficientes de la expresión del plano dado en (5). Más precisamente, se calcula la expresión de cada uno de los coeficientes de la cubica en el infinito, en función de las cónicas de interpolación prescritas en los planos $s$=*0* y $u$=*0* y el plano dado en (5). Usando el hecho que las cónicas de interpolación prescritas son elipses, se pude garantiza que los perfiles del cuboide sean también elipses. Estos perfiles elípticos pueden ser reales o imaginarios. En el caso de elipses imaginarias aparece una desconexión del cuboide, esto se controla con los coeficientes libres del plano dado en (5).

La Figura 2 muestra un ejemplo de cuboides con perfiles elípticos conectados con clase $G^1$, lo cual permite construir una superficie tubular que interpola dos elipses prescritas en dos planos diferentes en 3D.

**Conclusión**

El análisis realizado sobre superficies algebraicas de grado 3, nos permitió construir y controlar segmentos de superficies algebraicas que interpolan dos cónicas en el espacio. En el análisis de estos cuboides se utilizó la propiedad que tienen estas superficies algebraicas de contener rectas. En particular, trabajamos en el caso que el cuboide contiene una sola recta. Se usó dicha recta, para abanicar una familia de planos, que al intersectar al cuboide resulta una familia de cónicas en 3D, similar a las superficies tubulares descritas en [Paluszny-Boehm] llamadas cíclides. De esta forma se construye un segmento de superficie algebraica cuyos perfiles son cónicas y a demás interpola dos cónicas prescritas. También se estudiaron las condiciones para conectar dos segmentos de cuboide con clase $G^1$.

**Referencia.**


[Paluszny- Boehm] M. Paluszny, W. Boehm. General cyclides. Computer Aided Geometric Design 15 (7), 699-710.

[Boehm-Paluszny] W. Boehm, M. Paluszny. General cyclides as joining pipes. Computer Aided Geometric Design 15, 699-710

[Paluszny-Tovar] J. Franquiz, M. Paluszny, F. Tovar. Cyclides and the guiding circle. Mathematics and Computers in Simulation 73 (1), 168-174.

[Bajaj – Xu] G. Xu, H. Huang, C. Bajaj. $C^1$ modeling with a-patches from rational trivariate function. Computer Aided Geometric Design 18 (2001), 221-243.