

El Modelo de Amplitud y el método de Hurwicz (The Amplitude Model and the Hurwicz method)

María J. García G. (Mariminimagarcia@yahoo.com)

Minimax Consultores, C. A., Caracas, Venezuela.

Gilberto J. Hernández G. (Minimaxconsultores@yahoo.com)

Minimax Consultores, C. A., Caracas, Venezuela.

&

José G. Hernández R. (jhernandez@unimet.edu.ve)

Universidad Metropolitana, Gestión de la tecnología, Caracas, Venezuela.

Minimax Consultores, C. A., Caracas, Venezuela.

Resumen

Cuando se resuelven problemas de toma de decisiones, se pueden presentar cinco posibles situaciones, las cuales dependen de los estados de la naturaleza. Se tienen problemas: 1. Bajo certeza, cuando existe un solo estado de la naturaleza y por supuesto con probabilidad conocida; 2. Bajo riesgo, en el caso de tener más de un estado de la naturaleza, con probabilidades conocidas; 3. Bajo incertidumbre, se presentan más de un estado de la naturaleza, pero con probabilidades desconocidas; 4. Bajo ignorancia, se presupone que existe más de un estado de la naturaleza, pero estos son desconocidos y 5. Bajo competencia, cuando los estado de la naturaleza, son manejados por un competidor que persigue los mismos objetivos del tomador de decisiones. Para el tercero de estos casos, los problemas bajo incertidumbre, se creó un método, que usa la dispersión de los datos para la toma de decisiones, en particular hace uso de la amplitud, por lo cual se distinguió como El Modelo de Amplitud (EMA).

EMA surge como complemento a dos de los métodos tradicionales, Laplace y Hurwicz, los cuales a su vez le dan origen, ya que toma el valor esperado del método de Laplace y el concepto de factor multiplicativo manejado por el método de Hurwicz. Es decir EMA parte del valor esperado calculado por Laplace y lo corrige usando la amplitud como castigo la cual es multiplicada por un factor β .

Aunque la intención inicial era que EMA ayudara a Laplace y a Hurwicz, terminó tomando vida propia y fue extendido a la toma de decisiones bajo riesgo y se ha tratado de mejorar usando otros conceptos, entre ellos el método de arrepentimiento.

Sin embargo en la mayoría de estas pruebas y modificaciones de EMA, si bien se hace comparación frente a los métodos tradicionales más conocidos, el estudio, generalmente, se ha centrado en Laplace, descuidando en cierta forma al método de Hurwicz.

Esta situación inspira el objetivo del presente trabajo: Mostrar cómo pueden interactuar EMA y el método de Hurwicz.

La metodología para alcanzar este objetivo, tal como se ha hecho en otros trabajos similares, será la Metodología Integradora-Adaptable para desarrollar Sistemas de Apoyo a las Decisiones (MIASAD), la cual sigue una serie ordenada de pasos, en lugar de establecer hipótesis y por su flexibilidad es de gran utilidad en distintos problemas de investigación.

Como limitaciones y alcances es necesario aclarar que en este trabajo no se harán estudios de campo, sino que se estudiarán EMA y el método de Hurwicz a través de algunos problemas construidos ad hoc para ilustrar esta situación, los cuales engrosarán el conjunto de los problemas HERGAR, que son problemas que se han venido construyendo para el estudio de la toma de decisiones bajo riesgo e incertidumbre. Este estudio comparativo, permite presentar conclusiones de la interacción de los dos métodos, destacando, cuando EMA puede apoyar a Hurwicz e incluso cuando debe sustituirlo.

Palabras claves: Toma de decisiones bajo riesgo e incertidumbre, El Modelo de Amplitud, El método de Hurwicz, Problemas HERGAR.

Introducción

Al estudiar toma de decisiones se deben establecer tres conceptos básicos: las alternativas, los estados de la naturaleza y los pagos.

Alternativas.- Acciones posibles a ser seguidas por el decisor. Entendiendo por decisor o analista a la persona o grupo que realiza el análisis de la toma de decisiones.

Estados de la naturaleza.- Situaciones del entorno que se puede presentar en un momento dado.

Pago.- Consecuencia, resultado, expresado en unidades de medición adecuada, que se obtiene al escoger una alternativa, cuando se da un determinado estado de la naturaleza.

De acuerdo a los estados de la naturaleza se puede hablar de distintas condiciones para la toma de decisiones (García et al., 2012):

Bajo certidumbre.- En la cual los parámetros en juego, son conocidos con certeza, sin depender de ninguna medida de probabilidad, lo que sería equivalente a tener un solo estado de la naturaleza. Los problemas que aquí se presentan se suelen resolver por técnicas de programación matemática.

Bajo riesgo.- Donde los estados de la naturaleza son conocidos, y obedecen a una medida de probabilidad conocida.

Bajo incertidumbre.- Es aquella donde los estados de la naturaleza son todos conocidos, pero su medida de probabilidad no lo es.

Bajo ignorancia.- Situación en la cual los estados de la naturaleza no son conocidos. Para resolver los problemas que bajo esta situación se presentan, en general, es necesario aumentar la información.

Bajo competencia.- Donde los estados de la naturaleza no son generados por un ente ajeno a la situación, sino por un competidor, que persigue los mismos objetivos que el decisor. En este último caso los problemas se resuelven a través de Teoría de juegos.

En caso de toma de decisiones bajo incertidumbre, sobre las cuales está centrada esta investigación, se consiguen en la literatura tradicional de esta especialidad (Baumol 1980, Hillier y Lieberman 1974, Levin y Kirkpatrick 1985, Mathur y Solow 1996, Rheault 1982, Taha 1998, Winston 1994) una serie de métodos para resolver esta clase de problemas. Entre los métodos mencionados: Modelo Maximax, también conocido como el modelo del optimista, Modelo Maximin, conocido como modelo del pesimista o criterio de Wald, Modelo Minimax, o modelo del arrepentimiento, o de Savage, Modelo de realismo (Levin y Kirkpatrick 1985), mejor conocido como criterio de Hurwicz (Mathur y Solow 1996) y el Modelo del promedio (Levin y Kirkpatrick 1985), generalmente conocido como criterio de Laplace, se deben destacar estos dos últimos el criterio de Hurwicz y el criterio de Laplace. Este último, considera que todos los eventos tienen igual probabilidad de ocurrencia, por lo cual la alternativa que tenga el mejor valor esperado será la seleccionada, para ello se usa: $VE_i = \sum_{j=1,n} P_{ij} / n$, siendo VE_i el valor esperado de

la alternativa i , P_{ij} el pago que obtiene la alternativa i al darse el estado de la naturaleza j y n el número de estados de la naturaleza.

Por su parte el criterio de Hurwicz (Binmore, 2007; Diecidue y Wakker, 2001; Ghirardato et al., 2004; Rostek, 2006; Strat, 1990) sólo toma en cuenta el mejor y peor valor y con el uso de un factor α , se escoge la alternativa que aporte el mejor pago, usando para ello: $VE_i = \alpha * \text{Máximo } P_{ij} + (1 - \alpha) * \text{Mínimo } P_{ij}$, donde, como ya se dijo, α es un factor multiplicativo, el cual toma valores entre 0 y 1 y VE_i y P_{ij} , tienen el mismo significado previamente señalado, pero para los pagos, en cada alternativa sólo se usarán el menor y el mayor valor, tal como lo señala la expresión.

Un tercer método que suele ser considerado es Minimax, que trabaja bajo una filosofía conservadora, seleccionando la alternativa que tenga el menor arrepentimiento. Este arrepentimiento se calcula a través de una matriz de arrepentimiento. Y la selección de la alternativa se hará bajo la siguiente expresión: $A_i^* = \text{Min}_i \{ \text{Max}_i \{ P_{aij} \} \}$, donde A_i^* será la alternativa seleccionada y los P_{aij} son los valores de arrepentimiento, para el pago de la alternativa i , cuando se da el estado de naturaleza j .

Pero como se puede ver en la literatura citada, todos estos métodos son de vieja data, por lo cual en este trabajo se hará referencia a ellos denominándolos métodos tradicionales.

Como apoyo a los métodos tradicionales, en particular Hurwicz y Laplace, surgió El Modelo de Amplitud (EMA) (Hernández y García, 2001; 2003; García et al., 2012), el cual como característica particular tiene la de tomar en cuenta la dispersión de los datos, en particular la amplitud, de allí su nombre.

En la valoración de las alternativas, EMA sigue, para el caso de maximización, la expresión: $A_i^* = \text{Max}_i \{ VE_i + (\beta * VE_i - (1 - \beta) * A_{mi}) \}$, donde A_{mi} será la amplitud de la alternativa i y β es un factor multiplicativo, que aunque puede tomar valores entre 0 y 1, se ha demostrado (García et al., 2012) que para un uso correcto del mismo debe estar alrededor de 0,8. Este factor actúa como castigo, de allí que para el caso de minimización la expresión sólo cambia por + el símbolo que precede a $(1 - \beta)$.

Como ya se dijo EMA fue creado como apoyo a Hurwicz y Laplace, sin embargo ha tomado vida propia y se ha trabajado con variaciones del mismo, incluso se ha ampliado su alcance a la toma de decisiones bajo riesgo, surgiendo así el Modelo de Amplitud para Riesgo e Incertidumbre (MARI). Para comprobar la validez de estos modelos y sus variaciones se han creado problemas Ad hoc, los problemas HERGAR. Sin embargo, aunque al hacer comparaciones contra los métodos tradicionales, se usa el criterio de Hurwicz, no se ha realizado ningún estudio particular que compare a EMA frente a Hurwicz, con este trabajo se espera llenar este vacío, de allí que el objetivo del mismo sea: Mostrar cómo pueden interactuar EMA y el método de Hurwicz. Como ya se han presentado los dos modelos Hurwicz y EMA, sólo se tendrá un objetivo específico, mostrar a través de algunos problemas HERGAR, cómo interactúan Hurwicz

y EMA, dando recomendaciones generales, acerca de cual considerar más relevante según cada caso. Esta situación define las limitaciones y alcances, ya que no se hará ningún estudio de campo, sino que todo el análisis se hará a través de un conjunto de problemas HERGAR, creados especialmente para este trabajo.

Metodología

Para alcanzar el objetivo general, se seguirá la Metodología Integradora-Adaptable para desarrollar Sistemas de Apoyo a las Decisiones [MIASAD] (García et al., 2011), la cual por su flexibilidad y su posibilidad de adaptarse a distintos tipos de investigación, como se señala en García et al. (2012), se pueden aplicar de ella, sólo los pasos necesarios, por lo cual, similar a lo realizado en otros trabajos (García et al., 2012) sólo se seguirán los siguientes pasos:

- a) Definir el problema, que según lo indicado en los objetivos es mostrar cómo interactúan EMA y el criterio de Hurwicz;
- b) Elaborar un primer prototipo, donde por tratarse de un artículo científico, se identificaron los usuarios del producto final, es decir los principales lectores de este artículo, ellos serán todos los estudiosos de la toma de decisiones, en especial los interesados en la toma de decisiones bajo riesgo e incertidumbre. También se estableció la estructura del artículo, el cual además de la introducción y la metodología constará de un solo capítulo central, en el cual a través de varios problemas creados especialmente para este estudio se verá cuando se debe usar cada uno de los dos modelos en discusión. Se cerrará el trabajo con un capítulo para conclusiones y recomendaciones;
- c) Obtener datos, en este caso sobre toma de decisiones bajo riesgo e incertidumbre;
- d) Establecer alternativas, que serían los distintos problemas creados para analizar los dos modelos;
- e) Evaluar alternativas, de acuerdo a las bondades presentadas por cada modelo;
- f) Seleccionar la alternativa, de acuerdo a la evaluación previa y tomando en cuenta los objetivos secundarios, ya sean tácitos o explícitos;
- g) Implementar la mejor alternativa, ilustrar como se llevaría en la práctica la implementación del uso de cada uno de los modelos estudiados;
- h) Establecer controles, mecanismos, que permitan reconocer si la solución conseguida, sigue siendo válida en el transcurso del tiempo.

Estudio comparativo del criterio de Hurwicz y El Modelo de Amplitud (EMA)

Los problemas HERGAR, suelen ser problemas de tres alternativas y tres estados de la naturaleza, sin embargo en este trabajo, se usarán problemas con cuatro estados de la naturaleza, para poder ver mejor las bondades y limitaciones del criterio de Hurwicz. Adicionalmente en este trabajo se hará uso de la matriz de arrepentimiento del modelo Minimax, pero no se usará este modelo, sino que sobre dicha matriz se

calculará el valor esperado del arrepentimiento (Ve Arr), la amplitud del arrepentimiento (Am Arr), el arrepentimiento acumulado (A A) y el balance del arrepentimiento (Balance), que será la suma algebraica del arrepentimiento de una alternativa, de acuerdo al estado de la naturaleza que haya resultado favorecido. En este Balance, las comparaciones se hacen con respecto a lo mínimo que se hubiese ganado y lo máximo que se hubiese perdido.

En las tablas siguientes (Tablas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 y 17) se presentarán los problemas HERGAR021 hasta HERGAR037 y para cada una de ellas se presentará una tabla arrepentimiento (Tablas 1ar, 2ar, 3ar, 4ar, 5ar, 6ar, 7ar, 8ar, 9ar, 10ar, 11ar, 12ar, 13ar, 14ar, 15ar, 16ar y 17ar) donde se incluirán los parámetros previamente señalados (Ve Arr, Am Arr, A A y Balance), para apoyar a través de ellos el análisis.

Para todos los problemas HERGAR presentados se usará $\alpha = 0,7$ (optimista) y $\beta = 0,8$.

El primer caso a presentar es el muy sencillo, es el observado en la tabla 1 y tabla 1ar, correspondiente al problema HERGAR021. Allí Hurwicz, no diferencia y EMA sí, por lo cual la alternativa a tomar sería la ofrecida por EMA.

Tabla 1. Comparación a través del problema HERGAR021.

| | E1 | E2 | E3 | E4 | Ve | Am | EMA | Hurwicz |
|-----|----|----|----|----|----------|-----------|------------|------------|
| A01 | 0 | 4 | 10 | 10 | 6 | 10 | 8,8 | 7,0 |
| A02 | 0 | 6 | 0 | 10 | 4 | 10 | 5,2 | 7,0 |
| A03 | 0 | 5 | 5 | 10 | 5 | 10 | 7,0 | 7,0 |

Tabla 1ar. Matriz de arrepentimiento del problema HERGAR021.

| | E1 | E2 | E3 | E4 | Ve Arr | Am Arr | A A | Balance |
|-----|----|----|----|----|------------|----------|----------|----------|
| A01 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0,5 | 2 | 2 | 3 |
| A02 | 0 | 0 | 10 | 0 | 2,5 | 10 | 10 | -9 |
| A03 | 0 | 1 | 5 | 0 | 1,5 | 5 | 6 | -6 |

En este problema como en todos los restantes, se han colocado en azul los mejores valores para cada caso, resaltándolo en negrita si es único. En el HERGAR021, la mejor alternativa será la A01, que es la escogida por Laplace (Ve) y por EMA, en este caso aunque todas las alternativas tienen igual amplitud, EMA escoge la de mejor valor esperado (Ve).

Otro caso similar y sencillo de decidir es el HERGAR022, de las tablas 2 y 2ar.

Tabla 2. Comparación a través del problema HERGAR022.

| | E1 | E2 | E3 | E4 | Ve | Am | EMA | Hurwicz |
|-----|----|----|----|----|----|----|-----|------------|
| A03 | 0 | 5 | 5 | 10 | 5 | 10 | 7,0 | 7,0 |
| A04 | 2 | 3 | 3 | 12 | 5 | 10 | 7,0 | 9,0 |
| A05 | -2 | 7 | 7 | 8 | 5 | 10 | 7,0 | 5,0 |

Tabla 2ar. Matriz de arrepentimiento del problema HERGAR022.

| | E1 | E2 | E3 | E4 | Ve Arr | Am Arr | A A | Balance |
|-----|----|----|----|----|--------|----------|-----|---------|
| A03 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 | 8 | -8 |
| A04 | 0 | 4 | 4 | 0 | 2 | 4 | 8 | -4 |
| A05 | 4 | 0 | 0 | 4 | 2 | 4 | 8 | -4 |

Similar que en el HERGAR021, aquí uno de los métodos, en este caso Hurwicz, decide, toma la segunda alternativa la A04, mientras que Laplace y EMA, con Ve y Am iguales, no son capaces de discernir.

Como se vio estos dos primeros casos no presentan mayores dificultades, igual sucede con el HERGAR037, presentado al final de este análisis (tablas 17 y 17ar), más no es así en el caso de HERGAR023, presentado en las tablas 3 y 3ar.

Tabla 3. Comparación a través del problema HERGAR023.

| | E1 | E2 | E3 | E4 | Ve | Am | EMA | Hurwicz |
|-----|----|----|----|----|----|----------|------------|------------|
| A06 | 0 | 6 | 6 | 8 | 5 | 8 | 7,4 | 5,6 |
| A03 | 0 | 5 | 5 | 10 | 5 | 10 | 7,0 | 7,0 |
| A07 | -2 | 5 | 5 | 12 | 5 | 14 | 6,2 | 7,8 |

Tabla 3ar. Matriz de arrepentimiento del problema HERGAR023.

| | E1 | E2 | E3 | E4 | Ve Arr | Am Arr | A A | Balance |
|-----|----|----|----|----|--------|--------|-----|---------|
| A06 | 0 | 0 | 0 | 4 | 1 | 4 | 4 | -2 |
| A03 | 0 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 4 | -4 |
| A07 | 2 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | 4 | -2 |

En HERGAR023, los Ve son iguales por lo cual Laplace no ayuda, pero EMA escoge la primera alternativa (A06), la de menor amplitud, mientras Hurwicz selecciona la tercera alternativa (A07), la de peor amplitud. Los restantes parámetros no ayudan mucho, excepto la Am Arr, que desfavorece la primera alternativa, por lo cual se debería escoger la tercera alternativa, especialmente si no se quiere ser conservador.

Algo similar sucede con el HERGAR024, presentado en las tablas 4 y 4ar.

Tabla 4. Comparación a través del problema HERGAR024.

| | E1 | E2 | E3 | E4 | Ve | Am | EMA | Hurwicz |
|-----|----|----|----|----|----------|----------|------------|------------|
| A08 | 0 | 4 | 4 | 12 | 5 | 12 | 6,6 | 8,4 |
| A09 | -2 | 4 | 10 | 12 | 6 | 14 | 8,0 | 7,8 |
| A10 | 3 | 3 | 3 | 7 | 4 | 4 | 6,4 | 5,8 |

Tabla 4ar. Matriz de arrepentimiento del problema HERGAR024.

| | E1 | E2 | E3 | E4 | Ve Arr | Am Arr | A A | Balance |
|-----|----|----|----|----|-------------|----------|----------|----------|
| A08 | 3 | 0 | 6 | 0 | 2,25 | 6 | 9 | -9 |
| A09 | 5 | 0 | 0 | 0 | 1,25 | 5 | 5 | 1 |
| A10 | 0 | 1 | 7 | 5 | 3,25 | 7 | 13 | -10 |

Aquí, en HERGAR024, EMA escoge la segunda alternativa (A09), la de mejor Ve, mientras Hurwicz, selecciona la primera alternativa (A08), pero en este caso, los restantes parámetros, Ve Arr, Am Arr, A A y Balance, todos favorecen a la alternativa dos, por lo cual debería ser la escogida.

Situaciones similares a las dos anteriores se presentan en los HERGAR025 y HERGAR026, los cuales se visualizan en las tablas 5 y 5ar y 6 y 6ar, respectivamente.

Tabla 5. Comparación a través del problema HERGAR025.

| | E1 | E2 | E3 | E4 | Ve | Am | EMA | Hurwicz |
|-----|----|----|----|----|----------|----------|------------|------------|
| A01 | 0 | 4 | 10 | 10 | 6 | 10 | 8,8 | 7,0 |
| A06 | 0 | 6 | 6 | 8 | 5 | 8 | 7,4 | 5,6 |
| A09 | -2 | 4 | 10 | 12 | 6 | 14 | 8,0 | 7,8 |

Tabla 5ar. Matriz de arrepentimiento del problema HERGAR025.

| | E1 | E2 | E3 | E4 | Ve Arr | Am Arr | A A | Balance |
|-----|----|----|----|----|----------|----------|----------|-----------|
| A01 | 0 | 2 | 0 | 2 | 1 | 2 | 4 | -4 |
| A06 | 0 | 0 | 4 | 4 | 2 | 4 | 8 | -6 |
| A09 | 2 | 2 | 0 | 0 | 1 | 2 | 4 | -2 |

Tabla 6. Comparación a través del problema HERGAR026.

| | E1 | E2 | E3 | E4 | Ve | Am | EMA | Hurwicz |
|-----|----|----|----|----|----------|----------|------------|------------|
| A11 | -2 | 6 | 10 | 10 | 6 | 12 | 8,4 | 6,4 |
| A06 | 0 | 6 | 6 | 8 | 5 | 8 | 7,4 | 5,6 |
| A09 | -2 | 4 | 10 | 12 | 6 | 14 | 8,0 | 7,8 |

Tabla 6ar. Matriz de arrepentimiento del problema HERGAR026.

| | E1 | E2 | E3 | E4 | Ve Arr | Am Arr | A A | Balance |
|-----|----|----|----|----|--------|--------|-----|---------|
| A11 | 2 | 0 | 0 | 2 | 1 | 2 | 4 | -4 |
| A06 | 0 | 0 | 4 | 4 | 2 | 4 | 8 | -6 |
| A09 | 2 | 2 | 0 | 0 | 1 | 2 | 4 | -2 |

En ambos casos, HERGAR025 y HERGAR026, EMA escoge la primera alternativa, hay un empate de Ve, pero de ellas, es la de mejor Am, mientras Hurwicz, se queda con la tercera alternativa.

En este caso todos los restantes parámetros favorecen a la tercera alternativa, la escogida por Hurwicz, sobre todo en HERGAR026, donde la amplitud de la primera alternativa es un poco más grande. Caso similar, pero en sentido contrario sucede con HERGAR027 (tablas 7 y 7ar).

Tabla 7. Comparación a través del problema HERGAR027.

| | E1 | E2 | E3 | E4 | Ve | Am | EMA | Hurwicz |
|-----|----|----|----|----|------|----|-----|---------|
| A12 | 0 | 4 | 10 | 11 | 6,25 | 11 | 9,1 | 7,7 |
| A02 | 0 | 6 | 0 | 10 | 4 | 10 | 5,2 | 7,0 |
| A13 | 0 | 5 | 5 | 12 | 5,5 | 12 | 7,5 | 8,4 |

Tabla 7ar. Matriz de arrepentimiento del problema HERGAR027.

| | E1 | E2 | E3 | E4 | Ve Arr | Am Arr | A A | Balance |
|-----|----|----|----|----|--------|--------|-----|---------|
| A12 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0,75 | 2 | 3 | 2 |
| A02 | 0 | 0 | 10 | 2 | 3 | 10 | 12 | -11 |
| A13 | 0 | 1 | 5 | 0 | 1,5 | 5 | 6 | -5 |

De nuevo EMA escoge la primera alternativa (A12) por ser la de mayor Ve y Hurwicz escoge la tercera alternativa (A13), pero todos los restantes parámetros favorecen la primera alternativa, por lo cual debe ser aceptada. Para el HERGAR028 (tablas 8 y 8ar), la situación es más complicada, de nuevo EMA escoge la alternativa uno (A14) y Hurwicz la alternativa tres (A16).

Tabla 8. Comparación a través del problema HERGAR028.

| | E1 | E2 | E3 | E4 | Ve | Am | EMA | Hurwicz |
|-----|----|----|----|----|----|----|-----|---------|
| A14 | -1 | 1 | 9 | 11 | 5 | 12 | 6,6 | 7,4 |
| A15 | -2 | 8 | 2 | 12 | 5 | 14 | 6,2 | 7,8 |
| A16 | -3 | 6 | 4 | 13 | 5 | 16 | 5,8 | 8,2 |

Tabla 8ar. Matriz de arrepentimiento del problema HERGAR028.

| | E1 | E2 | E3 | E4 | Ve Arr | Am Arr | A A | Balance |
|-----|----|----|----|----|--------|--------|-----|---------|
| A14 | 0 | 7 | 0 | 2 | 2,25 | 7 | 9 | -3 |
| A15 | 1 | 0 | 7 | 1 | 2,25 | 7 | 9 | -7 |
| A16 | 2 | 2 | 5 | 0 | 2,25 | 5 | 9 | -8 |

Para este problema todos los Ve son iguales y EMA escoge la alternativa (A14), la de menor Am y Hurwicz selecciona la alternativa tres (A16). Pero ahora los restantes parámetros son casi todos iguales y por una parte el Balance favorece a la alternativa uno y la Am Arr, da mayor apoyo a la alternativa tres. Por lo cual aquí, quizás sea conveniente recurrir a Minimax, que seleccionaría la alternativa tres. Un caso similar se puede observar en HERGAR029, presentado en las tablas 9 y 9ar.

Tabla 9. Comparación a través del problema HERGAR029.

| | E1 | E2 | E3 | E4 | Ve | Am | EMA | Hurwicz |
|-----|----|----|----|----|------|----|-----|---------|
| A17 | 1 | 1 | 9 | 12 | 5,75 | 11 | 8,2 | 8,7 |
| A18 | 1 | 8 | 2 | 12 | 5,75 | 11 | 8,2 | 8,7 |
| A19 | 1 | 5 | 5 | 12 | 5,75 | 11 | 8,2 | 8,7 |

Tabla 9ar. Matriz de arrepentimiento del problema HERGAR029.

| | E1 | E2 | E3 | E4 | Ve Arr | Am Arr | A A | Balance |
|-----|----|----|----|----|--------|--------|-----|---------|
| A17 | 0 | 7 | 0 | 0 | 1,75 | 7 | 7 | -3 |
| A18 | 0 | 0 | 7 | 0 | 1,75 | 7 | 7 | -4 |
| A19 | 0 | 3 | 4 | 0 | 1,75 | 4 | 7 | -7 |

Aquí, ninguno de los tres métodos, Laplace, Hurwicz y EMA, puede discernir, y los restantes parámetros el Balance es a favor de la alternativa uno y el Am Arr favorece la alternativa tres, que de nuevo sería la escogida si se recurre a Minimax. Estos dos últimos casos pudiesen hacer pensar que en general Am Arr y el método de arrepentimiento suelen coincidir. En el caso siguiente HERGAR030 (tablas 10 y 10ar), la situación es parecida, Laplace no discierne, EMA toma la alternativa uno y Hurwicz la alternativa dos.

Tabla 10. Comparación a través del problema HERGAR030.

| | E1 | E2 | E3 | E4 | Ve | Am | EMA | Hurwicz |
|-----|----|----|----|----|------|----|-----|---------|
| A20 | 2 | 1 | 9 | 11 | 5,75 | 10 | 8,4 | 8,0 |
| A21 | 0 | 8 | 2 | 13 | 5,75 | 13 | 7,8 | 9,1 |
| A19 | 1 | 5 | 5 | 12 | 5,75 | 11 | 8,2 | 8,7 |

Tabla 10ar. Matriz de arrepentimiento del problema HERGAR030.

| | E1 | E2 | E3 | E4 | Ve Arr | Am Arr | A A | Balance |
|-----|----|----|----|----|--------|--------|-----|---------|
| A20 | 0 | 7 | 0 | 2 | 2,25 | 7 | 9 | -4 |
| A21 | 2 | 0 | 7 | 0 | 2,25 | 7 | 9 | -5 |
| A19 | 1 | 3 | 4 | 1 | 2,25 | 3 | 9 | -9 |

De nuevo el Balance es a favor de la alternativa uno y el Am Arr favorece la alternativa tres, sólo que la escogida por Hurwicz era la dos, por lo cual, como los restantes parámetros no hacen otro aporte, la alternativa a seleccionar debe ser la uno. Diferente es el HERGAR031 (tablas 11 y 11ar).

Tabla 11. Comparación a través del problema HERGAR031.

| | E1 | E2 | E3 | E4 | Ve | Am | EMA | Hurwicz |
|-----|----|----|----|----|----|----|-----|---------|
| A22 | 2 | 1 | 4 | 13 | 5 | 12 | 6,6 | 9,4 |
| A23 | 0 | 7 | 2 | 11 | 5 | 11 | 6,8 | 7,7 |
| A24 | 1 | 2 | 5 | 12 | 5 | 11 | 6,8 | 8,7 |

Tabla 11ar. Matriz de arrepentimiento del problema HERGAR031.

| | E1 | E2 | E3 | E4 | Ve Arr | Am Arr | A A | Balance |
|-----|----|----|----|----|--------|--------|-----|---------|
| A22 | 0 | 6 | 1 | 0 | 1,75 | 6 | 7 | -5 |
| A23 | 2 | 0 | 3 | 2 | 1,75 | 3 | 7 | -2 |
| A24 | 1 | 5 | 0 | 1 | 1,75 | 5 | 7 | -6 |

En HERGAR031, Laplace no discierne y EMA presenta un empate entre las alternativas dos (A23) y tres (A24), mientras Hurwicz escoge la alternativa uno (A22). Sin embargo los restantes parámetros favorecen a la alternativa dos, una de las seleccionadas por EMA, que debe ser la escogida. Es importante notar aquí, que la presunción anterior de la coincidencia entre Am Arr y Minimax, no es siempre cierta.

Para el problema HERGAR032 (tablas 12 y 12ar), la situación es muy similar.

Tabla 12. Comparación a través del problema HERGAR032.

| | E1 | E2 | E3 | E4 | Ve | Am | EMA | Hurwicz |
|-----|----|----|----|----|----|----|-----|---------|
| A25 | 0 | 2 | 5 | 13 | 5 | 13 | 6,4 | 9,1 |
| A26 | 2 | 5 | 2 | 11 | 5 | 9 | 7,2 | 8,3 |
| A24 | 1 | 2 | 5 | 12 | 5 | 11 | 6,8 | 8,7 |

Tabla 12ar. Matriz de arrepentimiento del problema HERGAR032.

| | E1 | E2 | E3 | E4 | Ve Arr | Am Arr | A A | Balance |
|-----|----|----|----|----|--------|--------|-----|---------|
| A25 | 2 | 3 | 0 | 0 | 1,25 | 3 | 5 | -4 |
| A26 | 0 | 0 | 3 | 2 | 1,25 | 3 | 5 | -1 |
| A24 | 1 | 3 | 0 | 1 | 1,25 | 3 | 5 | -5 |

Para HERGAR032, Laplace no discierne y EMA selecciona la alternativa dos (A26), mientras Hurwicz escoge la alternativa uno (A25). Y aunque los restantes parámetros no se inclinan por ninguna, el Balance favorece a la alternativa dos, la escogida por EMA.

Para ir cerrando la discusión se presentarán los problemas HERGAR033 (tablas 13 y 13ar), HERGAR034 (tablas 14 y 14ar), HERGAR035 (tablas 15 y 15ar) y HERGAR036 (tablas 16 y 16ar), que en realidad son muy similares y donde se varía la tercera alternativa, la que Hurwicz da por ganadora.

Tabla 13. Comparación a través del problema HERGAR033.

| | E1 | E2 | E3 | E4 | Ve | Am | EMA | Hurwicz |
|-----|----|----|----|----|----------|----------|-------------|------------|
| A27 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 0 | 10,8 | 6,0 |
| A28 | 5 | 5 | 6 | 7 | 5,75 | 2 | 10,0 | 6,4 |
| A29 | -1 | 4 | 5 | 12 | 5 | 13 | 6,4 | 8,1 |

Tabla 13ar. Matriz de arrepentimiento del problema HERGAR033.

| | E1 | E2 | E3 | E4 | Ve Arr | Am Arr | A A | Balance |
|-----|----|----|----|----|------------|----------|----------|-----------|
| A27 | 0 | 0 | 0 | 6 | 1,5 | 6 | 6 | -4 |
| A28 | 1 | 1 | 0 | 5 | 1,75 | 5 | 7 | -7 |
| A29 | 7 | 2 | 1 | 0 | 2,5 | 7 | 10 | -5 |

Tabla 14. Comparación a través del problema HERGAR034.

| | E1 | E2 | E3 | E4 | Ve | Am | EMA | Hurwicz |
|------|----|----|----|----|----------|----------|-------------|------------|
| A27 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 0 | 10,8 | 6,0 |
| A28 | 5 | 5 | 6 | 7 | 5,75 | 2 | 10,0 | 6,4 |
| A29a | -1 | 4 | 4 | 12 | 4,75 | 13 | 6,0 | 8,1 |

Tabla 14ar. Matriz de arrepentimiento del problema HERGAR034.

| | E1 | E2 | E3 | E4 | Ve Arr | Am Arr | A A | Balance |
|------|----|----|----|----|------------|----------|----------|-----------|
| A27 | 0 | 0 | 0 | 6 | 1,5 | 6 | 6 | -4 |
| A28 | 1 | 1 | 0 | 5 | 1,75 | 5 | 7 | -7 |
| A29a | 7 | 2 | 2 | 0 | 2,75 | 7 | 11 | -6 |

Tabla 15. Comparación a través del problema HERGAR035.

| | E1 | E2 | E3 | E4 | Ve | Am | EMA | Hurwicz |
|------|----|----|----|----|----------|----------|-------------|------------|
| A27 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 0 | 10,8 | 6,0 |
| A28 | 5 | 5 | 6 | 7 | 5,75 | 2 | 10,0 | 6,4 |
| A29b | -1 | 2 | 2 | 12 | 3,75 | 13 | 4,2 | 8,1 |

Tabla 15ar. Matriz de arrepentimiento del problema HERGAR035.

| | E1 | E2 | E3 | E4 | Ve Arr | Am Arr | A A | Balance |
|------|----|----|----|----|------------|----------|----------|-----------|
| A27 | 0 | 0 | 0 | 6 | 1,5 | 6 | 6 | -4 |
| A28 | 1 | 1 | 0 | 5 | 1,75 | 5 | 7 | -7 |
| A29b | 7 | 4 | 4 | 0 | 3,75 | 7 | 15 | -10 |

Tabla 16. Comparación a través del problema HERGAR036.

| | E1 | E2 | E3 | E4 | Ve | Am | EMA | Hurwicz |
|------|----|----|----|----|----------|----------|-------------|------------|
| A27 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 0 | 10,8 | 6,0 |
| A28 | 5 | 5 | 6 | 7 | 5,75 | 2 | 10,0 | 6,4 |
| A29c | -1 | -1 | -1 | 12 | 2,25 | 13 | 1,5 | 8,1 |

Tabla 16ar. Matriz de arrepentimiento del problema HERGAR036.

| | E1 | E2 | E3 | E4 | Ve Arr | Am Arr | A A | Balance |
|------|----|----|----|----|------------|----------|----------|-----------|
| A27 | 0 | 0 | 0 | 6 | 1,5 | 6 | 6 | -4 |
| A28 | 1 | 1 | 0 | 5 | 1,75 | 5 | 7 | -7 |
| A29c | 7 | 7 | 7 | 0 | 5,25 | 7 | 21 | -16 |

En estos últimos cuatro problemas HERGAR033 a HERGAR036 se observa como Hurwicz se aferra a una alternativa que cada vez es peor bajando en pagos y en Ve a unos valores casi insostenible, pero como los valores extremos se mantienen, el criterio de Hurwicz, no reacciona a los pagos intermedios extremadamente bajos. Para cerrar se ha incluido el problema HERGAR037, en las tablas 17 y 17ar, donde Laplace y Hurwicz no disciernen.

Tabla 17. Comparación a través del problema HERGAR037.

| | E1 | E2 | E3 | E4 | Ve | Am | EMA | Hurwicz |
|-----|----|----|----|----|-----------|----------|-------------|-------------|
| A30 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 0 | 18,0 | 10,0 |
| A31 | 3 | 12 | 12 | 13 | 10 | 10 | 16,0 | 10,0 |
| A32 | -4 | 14 | 14 | 16 | 10 | 20 | 14,0 | 10,0 |

Tabla 17ar. Matriz de arrepentimiento del problema HERGAR037.

| | E1 | E2 | E3 | E4 | Ve Arr | Am Arr | A A | Balance |
|-----|----|----|----|----|------------|----------|-----------|-----------|
| A30 | 0 | 4 | 4 | 6 | 3,5 | 6 | 14 | -7 |
| A31 | 7 | 2 | 2 | 3 | 3,5 | 5 | 14 | -14 |
| A32 | 14 | 0 | 0 | 0 | 3,5 | 14 | 14 | -7 |

Sin embargo, en HERGAR037, EMA al haber una alternativa con amplitud cero, la primera alternativa (A30), esa será la escogida, aunque la Am Arr favorezca la alternativa dos y el Balance considere igual la

alternativa tres que la uno. Lo que hace reflexionar un poco más sobre la validez de estos otros parámetros cuando se toman cada uno de ellos por separado.

Otro aspecto sobre el cual se debe llamar la atención es la poca coincidencia entre las alternativas escogidas por Hurwicz y por EMA, pero esto no sorprende, ya que EMA favorece las alternativas de menor amplitud, es decir donde los valores están más cercanos unos a otros, menor dispersión en los pagos, mientras Hurwicz por el contrario favorecerá la alternativa con mayor dispersión de los pagos, ya que sólo toma en consideración los valores extremos, en particular dándole peso al mayor valor, cuando se usa un $\alpha = 0,7$, el cual es considerado optimista.

Con la discusión hasta aquí realizada, a través de diecisiete problemas HERGAR, se puede pasar a presentar algunas Conclusiones y recomendaciones.

Conclusiones y recomendaciones

El Modelo de Amplitud (EMA), aunque fue creado para reforzar a Laplace y Hurwicz, tiene vida propia, por lo cual es importante saber cuándo se debe confiar en él o seguir confiando en los resultados de los dos modelos que esperaba reforzar.

En general EMA va a estar alineado con Laplace, pero con Hurwicz suele estar enfrentado, por lo cual para este último caso se debe ser más cuidadoso. De estar Laplace y EMA alineados es preferible confiar en la solución que ellos ofrezcan, de no ser así, sólo se debe tomar la decisión de Hurwicz cuando se quiera ser más arriesgado y especialmente si el método Minimax lo respalda. En el resto de los casos es preferible quedarse con la solución que ofrece EMA.

Un comentario aparte merecen los parámetros aquí utilizados, Amplitud del arrepentimiento (Am Arr), Valor esperado del arrepentimiento (Ve Arr), Arrepentimiento Acumulado (A A) y Balance, que sólo se deben tomar en cuenta cuando ellos están alineados, en su mayoría, con una de las alternativas en disputa. De todo lo anterior, se permite recomendar, que se siga investigando sobre las posibilidades de aplicación de EMA, ya sea sólo o combinado con otros métodos. Igualmente se recomienda seguir creando problemas tipo los HERGAR, que permitan comparar los distintos métodos de solución.

Referencias

Baumol, W. J., *“Teoría económica y análisis de operaciones”*, Colombia: Prentice Hall (1980).

Binmore, K., *“Making Decisions in Large Worlds”*, Technical report 266, ESCR Centre for Economic Learning and Social Evolution, University College of London. (2007).

Diecidue, E. y P. P. Wakker, “On the Intuition of Rank-Dependent Utility”, *The Journal of Risk and Uncertainty*, 23(3), 281-298 (2001).

García, M. J., J. G. Hernández y G. J. Hernández, “*Una Metodología Integradora-Adaptable para desarrollar Sistemas de Apoyo a las Decisiones (MIASAD)*”, en J. Valderrama (Ed.), Congreso Interamericano de Computación Aplicada a la Industria de Procesos CAIP'2011, España: Universidad de Girona,753-760 (2011).

García, M. J., G. J. Hernández y J. G. Hernández, “*Quantification of the ethical-legal decisions*”, Fourteenth annual International Conference Global Business And Technology Association, Reading Book: USA, 250-257 (2012).

Ghirardato, P., F. Maccheroni y M. Marinacci, “*Differentiating ambiguity and ambiguity attitude*”, Journal of Economic Theory, 118, 133-173 (2004).

Hernández R., J. G. y M. J. García G., “*Toma de decisiones bajo incertidumbre considerando la dispersión*”, Documento presentado en la XXVII Conferencia Latinoamericana de Informática, Mérida Venezuela. (2001).

Hernández R., J. G. y M. J. García G., “*Análisis del factor BETA (β), en El Modelo de Amplitud (EMA)*”, Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones, 10(1-2), 187-199 (2003).

Hillier, F. S. y G. Lieberman, “*Operations research*”, San Francisco: Holden-day, Inc. (1974).

Levin, R. I. y Ch. A. Kirkpatrick, “*Enfoques cuantitativos a la administración*”, México: Compañía Editorial Continental, S.A. (1985).

Mathur K. y D. Solow, “*Investigación de Operaciones, el arte de la toma de decisiones*”, México: Prentice Hall (1996).

Rheault, J. P., “*Introducción a la teoría de decisiones con aplicaciones a la administración*”, México: Editorial Limusa (1982).

Rostek, M. J., “*Reasoning in Strategic and Non-Strategic Interactions*”, Doctoral dissertation, Yale University, USA (2006).

Strat, T. M., “*Decision Analysis Using Belief Functions*”, International Journal of Approximate Reasoning, 4, 391-417 (1990).

Taha, H. A., “*Investigación de operaciones una introducción*”, México: Prentice Hall (1998).

Winston, W. “*Investigación de operaciones: Aplicaciones y algoritmos*”, México: Grupo Editorial Iberoamérica (1994).